Emendando o *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege[†]

Fernando Ferreira
Universidade de Lisboa

Fez cem anos no dia 16 de Junho de 2002 que Bertrand Russell escreveu uma carta a Gottlob Frege a comunicar-lhe que o seu sistema dos *Grundgesetze der Arithmetik* era inconsistente. Numa linguagem moderna, o sistema de Frege consiste na lógica de segunda-ordem (são permitidas quantificações sobre objectos $\forall \mathbf{x}$, $\exists \mathbf{x}$, e sobre conceitos $\forall \mathbf{G}$, $\exists \mathbf{G}$) munida dum operador de extensionalidade ˆ que, a cada fórmula da linguagem $\mathbf{A(x)}$, associa um termo singular $\mathbf{\hat{~}x.A(x)}$. Este operador obedece à famosa (e infame) Lei V de Frege:

$$\mathbf{\hat{~}x.A(x) = \hat{~}x.B(x) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \Leftrightarrow B(x))}.$$

[Leia-se: a extensão de **A** é a mesma do que a extensão de **B** se, e somente se, os objectos que caem sob **A** e sob **B** são os mesmos.] Russell considerou o conceito $\mathbf{\forall G(x = \hat{~}z.Gz \Rightarrow \neg Gx)}$, abreviado por $\mathbf{x \notin x}$, e a sua extensão: o objecto $\mathbf{\hat{~}x.(x \notin x)}$. Este objecto é elemento de si próprio se, e somente se, não é: Russell *dixit*. O diagnóstico tradicional imputa a inconsistência à presunção de que todo o conceito possui extensão – nomeadamente, de que o conceito de Russell $\mathbf{x \notin x}$ possui extensão.

Num diagnóstico não tradicional, mas que encontra raízes em Henri Poincaré e no próprio Russell, Michael Dummett atribui a inconsistência dos *Grundgesetze* primariamente ao modo descuidado com que Frege encarou a quantificação de segunda-ordem. Nas palavras de Dummett "(Frege's) amazing insouciance concerning the second-order quantifier was the primary reason for his falling into inconsistency". Dummett observa que o conceito de Russell está definido impredicativamente. Um elemento **x** cai sob a conceito de Russell exactamente no caso em que, para todo o conceito **G** – incluindo o próprio conceito de Russell – **x** não cai sob **G** desde que **x** seja a extensão de **G**. Em suma, o conceito de Russell está definido através duma quantificação sobre uma totalidade que inclui o próprio conceito que se está a definir. Esta é a marca duma definição impredicativa.

A impredicatividade dos *Grundgesetze* está disfarçada por uma implícita regra de substituição: duma generalização de segunda-ordem da forma $\mathbf{\forall G(\ldots G\ldots)}$ pode sempre concluir-se $\mathbf{\ldots P\ldots}$, seja **P** predicativamente definível ou não. Em particular, da validade de $\mathbf{\forall G \exists H \forall x(Hx \Leftrightarrow Gx)}$ deduz-se o princípio de *compreensão*

$$\mathbf{\exists H \forall x(Hx \Leftrightarrow P(x))},$$

aplicado a qualquer fórmula $\mathbf{P(x)}$ da linguagem. Se se restringir a regra de substituição de modo a que apenas se obtenha compreensão para fórmulas $\mathbf{P(x)}$ em que não ocorram quantificações de segunda-ordem, obtem-se a lógica de segunda-ordem predicativa. Em 1996, Richard Heck mostrou que o sistema dos *Grundgesetze*, restrito à lógica de segunda-ordem predicativa, é consistente. Por outras palavras*: numa leitura predicativa, pode supor-se coerentemente que todo o conceito tem extensão*.

O resultado de Heck veio dar alguma justificação ao diagnóstico de Dummett. Levanta-se naturalmente a questão: será que se pode desenvolver a aritmética na lógica de segunda-ordem predicativa munida do operador de extensionalidade regulado pela Lei V? Infelizmente, a resposta parece ser negativa. O sistema de Heck é consistente, mas largamente inoperacional em termos

[†] Este texto sumaria o artigo "Amending Frege´s *Grundgesetze der Arithmetik*", no prelo na revista *Synthese*.

matemáticos. A forma como Frege consegue desenvolver a aritmética nos *Grundegesetze* utiliza definições impredicativas *ad libitum*. Por exemplo, a noção de "ancestralidade" duma relação **R** – central no desenvolvimento Fregeano da aritmética – é impredicativa. Dado um objecto **y**, o conceito que é verdade exactamente dos elementos **x** que são ancestrais de **y** por meio da relação **R** define-se assim: **x** cai sob esse conceito se, do facto de **z** ser **x** ou cair sob um conceito **F** se seguir que cada objecto com o qual **z** se encontre na relação **R** caia também sob **F**, então, independentemente de que conceito **F** se trate, **y** cai sob o conceito **F**. Frege define os números naturais como aqueles objectos para os quais o número zero é ancestral relativamente à relação "predecessor imediato". O desenvolvimento Fregeano da aritmética nos *Grundgesetze* é impredicativo.

No seu estudo, Heck também se debruça sobre a generalização do seu sistema a lógicas predicativas ramificadas. Aqui, a ideia é encarar os conceitos do sistema formal como indexados a vários níveis. Há os conceitos de nível zero, constituídos por aqueles que se podem definir por compreensão através de fórmulas sem nenhuma quantificação de segunda-ordem (como no caso predicativo normal). Há os conceitos de nível 1, constituídos por aqueles que se podem definir por compreensão através de fórmulas em que agora se permitem ocorrências de quantificações de segunda-ordem de nível zero. Há os conceitos de nível 2, constituídos por aqueles que se podem definir por compreensão através de fórmulas em que se permitem ocorrências de quantificações de segunda-ordem de níveis zero ou 1. E assim sucessivamente, obtendo-se uma hierarquia de conceitos, mais e mais abrangente conquanto o nível dos conceitos vá aumentando.

Do ponto de vista sintáctico, as variáveis de segunda-ordem exibem o seu nível por meio dum índice superior $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{G}^0$, $\mathbf{F}^1$, $\mathbf{G}^1$,…, $\mathbf{F}^n$, $\mathbf{G}^n$,… , e o princípio de compreensão toma a forma

$$\exists \mathbf{G}^n \forall \mathbf{x}(\mathbf{G}^n\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x})),$$

aplicado a qualquer fórmula **P(x)** onde apenas ocorrem quantificações de segunda-ordem de nível inferior a **n** (podendo admitir parâmetros de nível até **n** inclusive). Heck observou que a versão predicativa ramificada dos *Grundgesetze* também é consistente, se bem que ainda inoperacional em termos matemáticos. No contexto Fregeano, e em contextos semelhantes, a via predicativa parece ser impotente para desenvolver a matemática.

Nos *Principia Mathematica*, Russell e Whitehead, depararam-se com um problema análogo. O sistema dos *Principia* constituiu a resposta logicista de Russell ao seu próprio paradoxo. O sistema lógico de Russell e Whitehead contém todas as ordens finitas, i.e., a ordem dos objectos, a ordem dos conceitos, a ordem dos conceitos de conceitos, a ordem dos conceitos de conceitos de conceitos, *et cætera* (tipos lógicos). No sistema lógico dos *Principia* há todas estes tipos, enquanto que nos *Grundgesetze* pode considerar-se que há apenas duas ordens (a dos objectos e a dos conceitos). Todavia, nem o operador de extensionalidade, nem a concomitante Lei V, fazem parte dos *Principia* (o que evita a contradição Russelliana mas exige a introdução do Axioma do Infinito). Adicionalmente, o sistema de Russell e Whitehead é, por opção filosófica, um sistema predicativo, ramificando por níveis todos os tipos (com excepção do tipo dos objectos). Esta opção paralisa matematicamente o sistema. Para obstar a esta dificuldade, Russell introduz o chamado Axioma de Redutibilidade: num dado tipo, cada predicado é co-extensional a um predicado de nível zero. Russell é pragmático em relação ao Axioma da Reducibilidade, considerando-o um defeito necessário do sistema.

Na versão predicativa ramificada dos *Grundgesetze*, o Axioma da Redutibilidade toma a seguinte forma simples: para qualquer nível **n**,

$$\forall \mathbf{F}^n \exists \mathbf{G}^0 \forall \mathbf{x}(\mathbf{F}^n\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{G}^0\mathbf{x}).$$

O axioma tem como efeito desfazer o que a ramificação impedia, viz. o paradoxo de Russell. Ao contrário dos *Principia*, no enquadramento Fregeano a adjunção do Axioma da Redutibilidade torna o sistema inconsistente.

Suponhamos que sob um determinado conceito cai apenas um número finito de objectos. Sejam eles $\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_n}$. Um tal conceito é co-extensional ao conceito *predicativo* dado pela disjunção $\mathbf{x = a_1 \lor x = a_2 \lor \ldots \lor x = a_n}$. Informalmente, o Axioma da Redutibilidade Finita diz que todo o conceito sob o qual apenas cai um número finito de objectos é um conceito co-extensional a um conceito predicativo. Não parece descabido defender que este axioma é verdadeiro em virtude do significado da noção de finitude e da maneira como a linguagem está (sintacticamente) estabelecida.

A formulação do Axioma da Redutibilidade Finita no sistema ramificado de Heck não é automática, pois a noção de finitude não é uma noção de primeira-ordem. Propõe-se para a sua formulação um tríplice constituído por duas definições e pelo axioma de redutibilidade *strictu sensu*:

(i) Sob um conceito de nível zero $\mathbf{F^0}$ cai apenas um número finito de objectos se, por definição, esse conceito puder ser duplamente bem-ordenado através duma relação de ordem de nível zero. Mais precisamente, a relação de ordem em questão é predicativa e, todo o subconceito predicativo (i.e., conceito predicativo extensionalmente incluído em) de $\mathbf{F^0}$, verdadeiro de alguma coisa, tem elemento mínimo e elemento máximo para a relação de ordem em questão.

(ii) Um conceito $\mathbf{G^n}$ de nível $\mathbf{n}$ é finito se (por definição) for co-extensional a um conceito de nível zero sob o qual caia apenas um número finito de objectos (*vide* a alínea anterior).

(iii) Tem-se o seguinte princípio de redutibilidade: qualquer subconceito dum conceito finito é finito.

O sistema ramificado de Heck imbuído do princípio (iii) e das correspondentes definições (i) e (ii) é consistente e nele pode desenvolver-se a aritmética de Peano de primeira-ordem. Demonstra-se que a noção de ancestrabilidade de Frege é predicativa neste sistema ramificado (i.e., é predicativa *dado* o axioma de redutibilidade finita). Este é o ponto essencial, pois permite desenvolver a aritmética por linhas essencialmente Fregeanas.

A visão logicista da aritmética não se contenta com um formalismo não interpretado: há que justificar a correcção da definição (i). Esta definição exige que todo o subconceito predicativo não vazio de $\mathbf{F^0}$ tenha máximo e mínimo, sendo silenciosa sobre subconceitos não predicativos. Ora, se a definição está correcta, então qualquer subconceito não vazio de $\mathbf{F^0}$, predicativo ou não, tem máximo e mínimo. Usando (iii), pode demonstrar-se formalmente que este é, efectivamente, o caso. Todavia, usámos a correcção da definição em (i) para, precisamente, justificar a aceitação de (iii). Estamos a andar em círculo. Um círculo possivelmente virtuoso, mas um círculo na mesma.

O círculo pode ser rompido. A correcção da definição de finitude dada em (i) pode justificar-se desde que se postule que os conceitos de nível zero sejam fechados para o operador informal "há um número finito de objectos **x** tais que **...x...**". Observe-se que este postulado faz sentido, pois não se pode deixar de pressupor a noção informal de finitude quando se tenta justificar a sua definição formal. Desde que se aceite a legitimidade da noção de finitude e se endosse o Axioma da Redutibilidade Finita, então é possível desenvolver a aritmética de Peano de primeira-ordem na versão predicativa ramificada dos *Grundgesetze* de Gottlob Frege.

Bibliografia

1. Dummett, Michael: *Frege: Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.

2. Heck, Richard: *The Consistency of Predicative Fragments of Frege's Grundgesetze der Arithmetik*, History and Philosophy of Logic, 17 (1996), pp. 209-220.

3. Russell, Bertrand: *Introduction to Mathematical Philosophy*, Dover Publications, Inc., 1993. Publicado pela primeira vez em 1919.