Conceptes fonamentals de xarxes de computadors. Un enfocament analític.

J.M. Barceló, Ll. Cerdà, J. García.

Temario:

- Cadenas de Markov y teoría de colas.
  Ll. Cerdà, 9 horas.
- Traffic models.
  J.M. Barceló , 6 horas.
- Complex Networks.
  J.M. Barceló, 3 horas.
- No Markovian models.
  J. García , 3 horas.
- IP lookup and packet classification.
  J. García , 3 horas.
- Output scheduling.
  J. García , 3 horas.

Tema 1: Cadenas de Markov y teoría de colas

- Cadenas de Markov en tiempo discreto.
- Cadenas de Markov en tiempo continuo.
- Teoría de colas.
  - M/M/1.
  - M/G/1.
  - Reversibilidad en el tiempo (Burke).
  - Redes de Jackson y redes cerradas.

Espacio de probabilidad

- Espacio muestral (Ω) = conjunto de todos los posibles sucesos (ω)
- Evento aleatorio: conjunto de sucesos que cumplen una cierta condición (es un subconjunto de Ω).

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ cumple una cierta condición}\}$$

- Espacio de probabilidad: es una tripleta (Ω, ***F***, *P*) donde:
  - ***F*** es una familia de eventos aleatorios.
  - *P* asigna una probabilidad a cada evento aleatorio de ***F***.

Familia de eventos y definición de probabilidad

- La familia de eventos aleatorios ***F*** ha de cumplir:
  - Tiene el evento Ω,
  - Si los eventos *A* y *B* son de ***F***, també lo son $A+B$, AB, A^c,B^c.
  - Si los eventos A_i, i=1,2,… son de ***F***, también lo son ΣA_i i ΠA_i
- Las probabilidades asignadas a los eventos de ***F*** han de cumplir (definición axiomática de probabilidad):
  - $P[A] \geq 0$
  - $P[\Omega] = 1$
  - Si $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $P[\Sigma A_i] = \Sigma\, P[A_i]$
  - Si A_i es una partición de A, $P[A] = \Sigma\, P[A_i]$

Ejemplo

- Experimento: lanzar una moneda tres veces.
- Espacio muestral: Ω = {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX}
- Ejemplos de posibles eventos:
  - A = {sale una cara} = {CXX, XCX, XXC}
  - B = {salen al menos dos caras} = {CCC, CCX, CXC, XCC}
- Ejemplo de una familia de eventos:
  - $\boldsymbol{F} = \{\Omega , \emptyset, A, B, A+B, A^c, B^c, (A^c+B)^c\}$
- A menudo $\boldsymbol{F}$ no se da explícitamente porque se deduce del modelo.

Variable aleatoria (VA)

- Es una función definida sobre el espacio muestral Ω de un espacio de probabilidad $(\Omega, \boldsymbol{F}, P)$.
- Asigna un número real $X(\omega)$ a cada posible suceso $\omega \in \Omega$.
- Para cada número x, $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$ es un evento de $\boldsymbol{F}$.
- Normalmente se suprime la dependencia funcional con ω y se escribe X en lugar de $X(\omega)$ y $\{X \leq x\}$ en lugar de $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$.
- Una VA puede ser discreta o continua.

Ejemplo

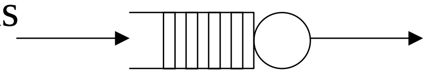
- Experimento: lanzar una moneda tres veces.
- Espacio muestral: Ω = {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX}
- Definimos la VA X = nombre de caras en el primer y último lanzamiento:
  - $\{X = 0\}$ = {XCX, XXX}
  - $\{X = 1\}$ = {CXX, CCX, XXC, XCC}
  - $\{X = 2\}$ = {CXC, CCC}

Proceso estocastico

- Es un conjunto de VAs: $\{X(t) : t \in \Gamma\}$ definidas en un mismo espacio de probabilidad.
- Normalmente el índice t representa un tiempo y $X(t)$ el estado del proceso estocástico en el instante t.
- El proceso puede ser de tiempo discreto o continuo si Γ és discreto o continuo.
- Si el proceso es de tiempo discreto, usamos enteros para representar el índice: $\{X_1, X_2, ...\}$

Ejemplo: cola con un único servidor

llegadas



salidas

Podemos definir los procesos estocásticos:

- $A(t)$: número de llegadas hasta el instante t.
- $D(t)$: número de salidas hasta el instante t.
- $N(t)$: número de usuarios en el instante t.
- $V(t)$: tiempo necesario para servir los $N(t)$ usuarios que hay en el sistema (tiempo de espera virtual o trabajo remanente "*unfinished work*").
- ...

Diferencia entre proceso i VA

- Podemos imaginar un proceso como una secuencia de sucesos (*epochs*) que ocurren cada cierto intervalo (*inter-epoch times*).
- Por ejemplo, se dice que un proceso $X(t)$ es de poisson de parámetro λ, cuando la VA igual al nombre de sucesos que han ocurrido en un tiempo t, tiene una distribución de poisson de parámetro λt:

$$P[X(t) = i] = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

Cadenas de Markov

- En muchas ocasiones se puede representar el comportamiento de un sistema describiendo todos los distintos estados que el sistema puede ocupar e indicando las transiciones del sistema de un estado a otro.
- Si las transiciones de un estado a otro cumplen ciertos requisitos de independencia (ausencia de memoria) el sistemas puede describirse mediante una Cadena de Markov (MC).
- Podemos distinguir entre MC de tiempo continuo y de tiempo discreto.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

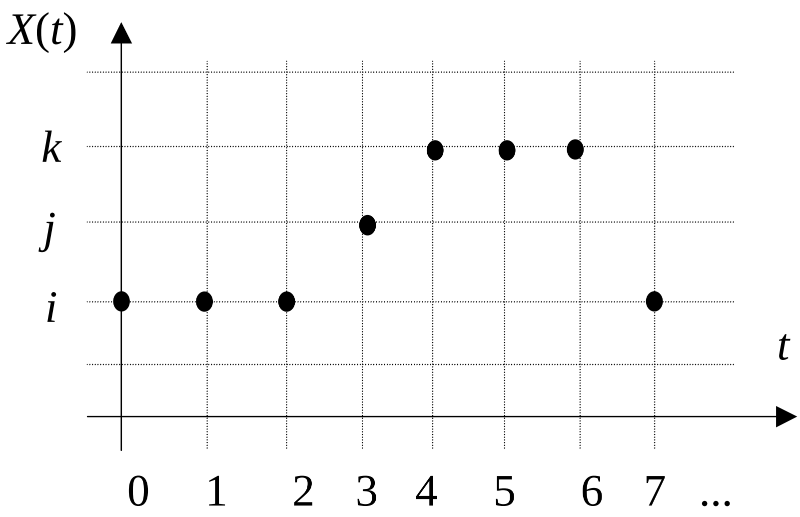
- ¿Qué propiedades debe cumplir un proceso estocástico para ser una MC de tiempo discreto?
  - Los estados deben formar un conjunto numerable (En caso contrario se habla de un *proceso de Markov*).
  - Si $X(t)$ es el evento {*En el instante t el sistema se encuentra en estado i*} se debe cumplir:

    $$P\{X(t) = i \mid X(t-1) = j, X(t-2) = k, \ldots\} = P\{X(t) = i \mid X(t-1) = j\}$$
  - Si $P\{X(t) = i \mid X(t-1) = j\} = P\{X(1) = i \mid X(0) = j\}$ para todo t tenemos una *MC de tiempo discreto homogénea.* Nosotros consideraremos solamente MC homogéneas.

NOTA: Algunos autores usan el termino cadena / proceso según si el tiempo (y no el estado) es discreto / continuo, y asumen que el estado es discreto.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

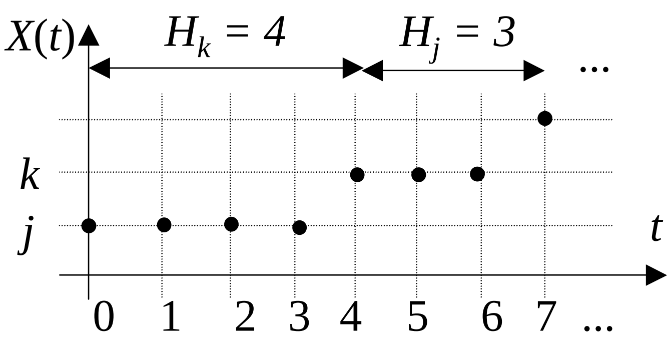
- Posible evolución de una MC de tiempo discreto:



Conceptes fonamentals de xarxes de computadors. Un enfocament analític.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Tiempo de permanencia en un estado k (*Sojourn or holding time*): Es la V.A. H_k igual al número de saltos que la cadena permanece en el estado k:



- La propiedad de Markov implica:

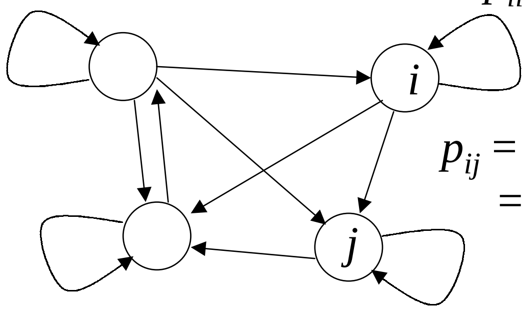
$$H_i(n) = \mathrm{P}\{H_i = n\} = p_{ii}^{n-1}\,(1-p_{ii}),\ \mathrm{n}\geq 1$$

Distribución geométrica de media $\mathrm{E}\{H_i\} = 1 / (1- p_{ii})$

NOTA: permitimos que p_{ii}=0, $H_i(n) = \delta(\mathrm{n}-1)$, y p_{ii}=1, $H_i = \infty$.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Representación gráfica de una MC de tiempo discreto:



$$p_{ii} = \mathrm{P}\{X(t) = i \mid X(t\text{-}1) = i\}$$
$$= \mathrm{P}\{X(1) = i \mid X(0) = i\}$$

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{X(t) = i \mid X(t\text{-}1) = j\}$$
$$= \mathrm{P}\{X(1) = j \mid X(0) = i\}$$

- $X(\mathrm{t}) = i$: En el instante t, el sistema está en estado i .
- p_{ij} se llaman probabilidades de transición en un paso.

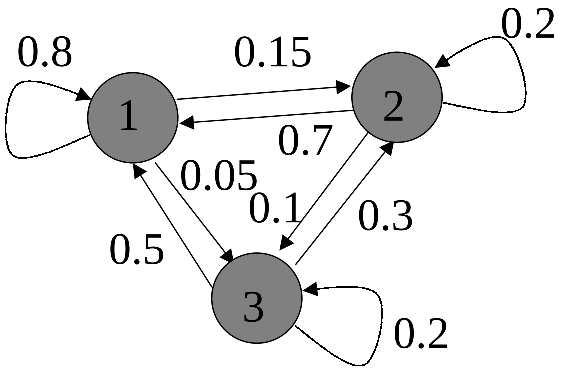
Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Matriz de probabilidades de transición en un paso:
  – El conjunto de probabilidades p_{ij}, i=1…, j=1… definen la evolución del sistema. Se pueden representar como una matriz, que se conoce como **matriz de probabilidades de transición en 1 paso:**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Ejemplo:
- Un terminal puede estar en 3 estados:
  - Estado 1: Inactivo
  - Estado 2: Activo sin enviar datos
  - Estado 3: Activo enviando datos



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Probabilidades de transición en *n* pasos:
  - La probabilidad de transición en 1 paso:

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{X(1) = j \mid X(0) = i\}$$

se generaliza en *n* pasos a:

$$p_{ij}^{(n)} = \mathrm{P}\{X(n) = j \mid X(0) = i\}$$

NOTA: en los pasos intermedios 1..n-1 puede que *X(t)* también esté en el estado *j*.

Matriz de probabilidades de transición en *n* pasos:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \dots \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}^{(n)} = \Sigma_k \, p_{ik}^{(m)} \, p_{kj}^{(n-m)}$$

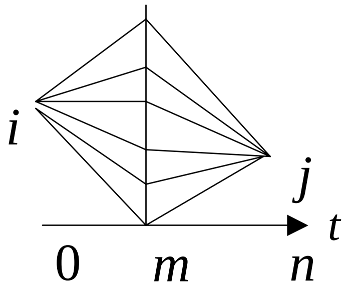
- Demostración:

$$p_{ij}^{(n)} = \mathrm{P}\{X(n) = j \mid X(0) = i\} = \Sigma_k \, \mathrm{P}\{X(n) = j, X(m) = k \mid X(0) = i\} =$$

$$\Sigma_k \, \mathrm{P}\{X(n) = j \mid X(m) = k, X(0) = i\} \, \mathrm{P}\{X(m) = k \mid X(0) = i\} =$$

$$\Sigma_k \, \mathrm{P}\{X(n) = j \mid X(m) = k\} \, \mathrm{P}\{X(m) = k \mid X(0) = i\} = \Sigma_k \, p_{ik}^{(m)} \, p_{kj}^{(n-m)}$$

- Interpretación:



Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov en forma matricial:

$$p_{ij}^{(n)} = \Sigma_k \, p_{ik}^{(m)} \, p_{kj}^{(n-m)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(m)} \, \mathbf{P}^{(n-m)}$$

- En particular:

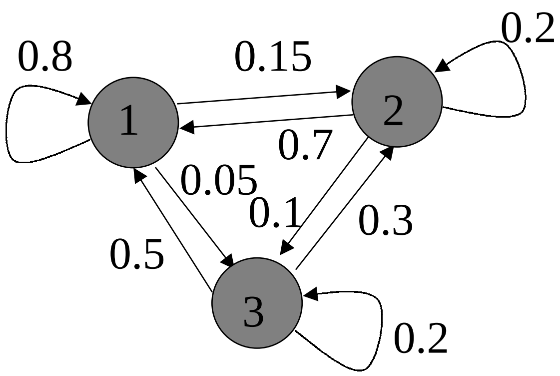
$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(1)} \, \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P} \, \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P}^{(n-1)} \, \mathbf{P}$$

- Iterando obtenemos:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Ejemplo:



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.770 & 0.165 & 0.065 \\ 0.750 & 0.175 & 0.075 \\ 0.710 & 0.195 & 0.095 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \\ 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \\ 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Clasificación de los estados:
  - **Estados recurrentes**: estados que tienen una probabilidad > 0 de volver al estado (se visitan un número infinito de veces).
  - **Estados transitorios***:* estados que tienen una probabilidad > 0 de no volver nunca al estado (se visitan un número finito de veces).

- Para tener criterios que nos permitan clasificar los estados, empezamos estudiando las distribuciones del número de pasos que tardamos de ir de un estado *i* a un estado *j*...

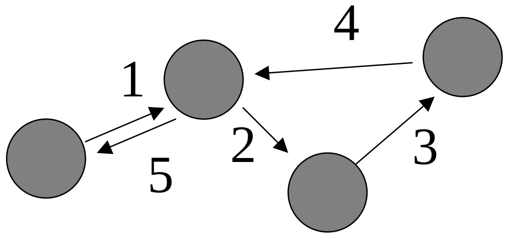
Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Definición:

  $f_{jj}^{(n)}$ = P{volver por primera vez al estado j en n pasos partiendo de j}

- Ejemplo: vuelta por primera vez al estado j en 5 pasos:

Estado j



• No confundir con la prob. de volver a j en n pasos habiendo salido de j, aunque entre medio visitemos j: $p_{ij}^{(n)}$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- $f_{jj}^{(n)}$ i $p_{jj}^{(n)}$ cumplen:

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{jj}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \quad n \geq 1$$

- La probabilidad de volver por primera vez en cualquier número de pasos a j habiendo partido de j es:

$$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Si $f_{jj} = 1$ decimos que j es un estado *recurrente*
- Si $f_{jj} < 1$ decimos que j es un estado *transitorio*

- Cuando $f_{jj} = 1$, definimos el *tiempo medio de recurrencia* M_{jj} como:

$$M_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$

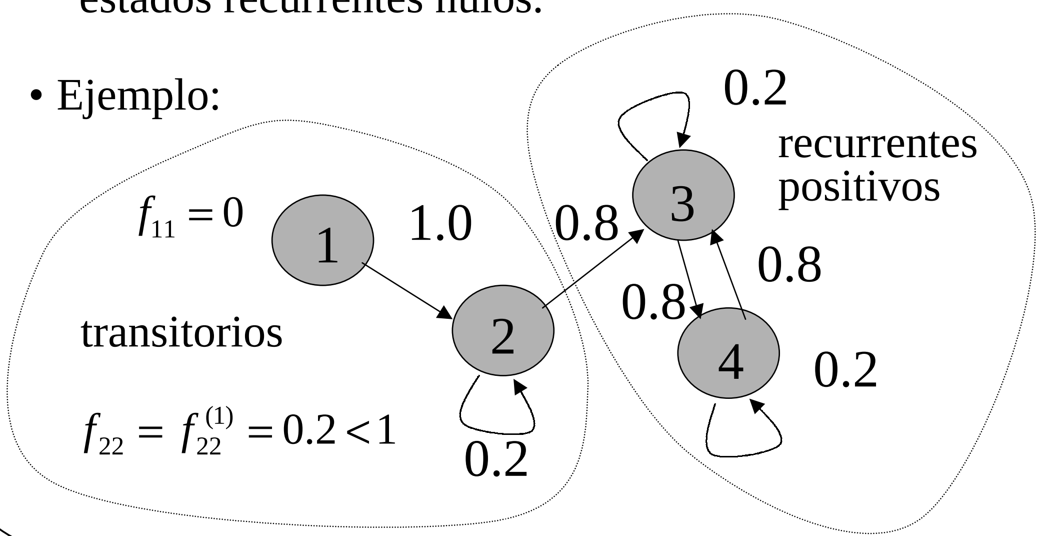
Es decir, M_{jj} es el número medio de pasos que hay que dar para volver al estado j por primera vez después de dejarlo.

- Clasificación de los estados recurrentes:
  - Si $M_{jj} = \infty$ es estado es *recurrente nulo*.
  - Si $M_{jj} < \infty$ es estado de *recurrente positivo.*

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- <u>Propiedad</u>: En las MC con un número finito de estados, los estados son recurrentes positivos o transitorios. Al menos un estado debe ser positivo recurrente. No puede haber estados recurrentes nulos.

- Ejemplo:



Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Análogamente podemos definir los tiempos de primer paso del estado *i* a estado *j* (f_{ij}). Evidentemente:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

- El tiempo medio del primer paso del estado *i* a estado *j* M_{ij} vale:

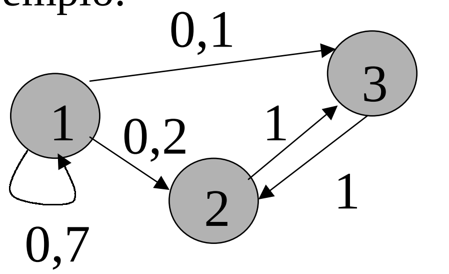
$$M_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Estados periódicos y aperiódicos:
  - Se dice que un estado *j* es **periódico** de periodo *k* ($k > 1$) si después de dejar el estado *j* sólo es posible volver a él en un número de saltos que es un múltiplo entero de *k*.
  - Si $k = 1$ el estado es **aperiódico**.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Ejemplo:



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}^{(n)} = 0{,}7\,\delta(n-1)$$
$$f_{22}^{(n)} = f_{33}^{(n)} = \delta(n-2)$$
$$f_{23}^{(n)} = f_{32}^{(n)} = \delta(n-1)$$
$$f_{13}^{(n)} = \begin{cases} 0{,}1 & , n=1 \\ 0{,}7^{n-1}0{,}1 + 0{,}7^{n-2}0{,}2 & , n>1 \end{cases}$$
$$f_{32}^{(n)} = \begin{cases} 0{,}2 & , n=1 \\ 0{,}7^{n-1}0{,}2 + 0{,}7^{n-2}0{,}1 & , n>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M} = (M_{ij}) = \begin{pmatrix} \infty & 11/3 & 12/3 \\ \infty & 2 & 1 \\ \infty & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

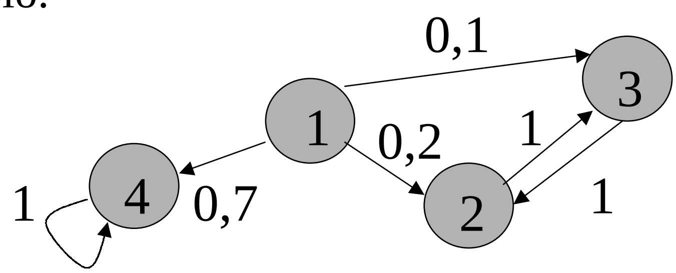
El estado 1 es transitorio. Los estados 2 y 3 son recurrentes positivos y son periódicos.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Una cadena es **irreducible** si cada estado puede ser alcanzado desde cualquier otro estado, es decir, si existe un entero *m* para el cual $p_{ij}^{(m)} > 0$ para cada par de estados *i* y *j*.
- Un subconjunto de estados *C* es **cerrado** si no es posible alcanzar desde un estado de *C* ningún otro estado fuera de ese conjunto, sino sólo estados de *C*.
- Si un conjunto cerrado tiene un sólo estado, este se llama **absorbente**.
- **Consecuencia**: Si el conjunto de todos los estados de la cadena es cerrado y no contiene ningún otro subconjunto cerrado, la cadena es irreducible.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Ejemplo:



  - El estado 4 es absorbente.
  - Los estados 2 y 3 son un conjunto cerrado.
  - La cadena no es irreducible.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Definiciones:
  - Si un estado es positivo recurrente y aperiódico se dice que es un estado *ergódico.*
  - Si todos los estados de una cadena son ergódicos, decimos que la cadena es *ergódica*.
- Teoremas:
  - Las cadenas finitas, aperiódicas e irreducibles son ergódicas.
  - Si una cadena es irreducible se cumple una de las tres propiedades siguientes:
    - Todos los estados son positivos recurrentes.
    - Todos los estados son recurrentes nulos.
    - Todos los estados son transitorios.
    - Además todos los estados son o aperiódicos o periódicos con el mismo periodo.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Probabilidad de estar en un estado: en general usaremos la notación $\pi_i(t) = P\{X(t) = i\}$. En forma vectorial (vector fila) $\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \ldots)$.
- La evolución de la cadena depende de las probabilidades iniciales $\boldsymbol{\pi}(0)$ (condiciones iniciales).
- Cuando estudiemos el régimen transitorio del sistema estaremos interesados en $\boldsymbol{\pi}(t)$.
- Cuando estudiemos el régimen permanente del sistema estaremos interesados la *distribución límite*:

$$\boldsymbol{\pi}(\infty) = (\pi_1(\infty), \pi_2(\infty), \ldots) = \boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$$

(si el límite existe).

Conceptes fonamentals de xarxes de computadors. Un enfocament analític.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Cálculo de la distribución límite:

$$\pi_i(t) = \Sigma_k\, p_{ki}\, \pi_k(t-1) \quad \overset{\text{en forma matricial}}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} &\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0)\mathbf{P} \\ &\boldsymbol{\pi}(2) = \boldsymbol{\pi}(0)\mathbf{P}^2 \\ &\ldots \\ &\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(\infty) = \boldsymbol{\pi}(0)\mathbf{P}^\infty \end{aligned}$$

Si existe la distribución límite $\Rightarrow \mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$

$\mathbf{P}^\infty$ se llama matriz límite y $\boldsymbol{\pi}$ es la distribución límite.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Ejemplo

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.15 & 0.05\\ 0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^2=\begin{pmatrix}0.764 & 0.168 & 0.068\\ 0.760 & 0.170 & 0.070\\ 0.752 & 0.174 & 0.074\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4=\begin{pmatrix}0.7628 & 0.1686 & 0.0686\\ 0.7620 & 0.1690 & 0.0690\\ 0.7604 & 0.1698 & 0.0698\end{pmatrix} \mathbf{P}^8=\begin{pmatrix}0.762500 & 0.168750 & 0.068750\\ 0.762499 & 0.168750 & 0.068750\\ 0.762497 & 0.168752 & 0.068752\end{pmatrix}$$

...

$\Rightarrow \pi = (0.76250, 0.16875, 0.06875)$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Distribución en estado estacionario:

$\pi_i(t) = \mathrm{P}\{X(t) = i\} = \Sigma_k \mathrm{P}\{X(t) = i \mid X(t\text{-}1) = k\}\ \mathrm{P}\{X(t\text{-}1) = k\}$,

$\pi_i(t) = \Sigma_k\, p_{ki}\, \pi_k(t\text{-}1)$

- En forma matricial: $\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t\text{-}1)\,\mathbf{P}$
- Suponiendo que existe el límite: $\lim_{t\to\infty} \pi_i(t) = \pi_i$
- Llamamos π_i la probabilidad en régimen estacionario de estar en el estado i, y $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$, el vector de probabilidades en régimen estacionario.
- En forma matricial ("*Global balance equations*"):

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P}$$

$$\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{e} = \mathbf{1},\ \mathbf{e} = (1, 1, \ldots)^T$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Ejemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \pi\,\mathbf{P}$$

$$\pi\,\mathbf{e} = \mathbf{1},\ \mathbf{e} = (1, 1, \ldots)^T$$

Solución usando octave:

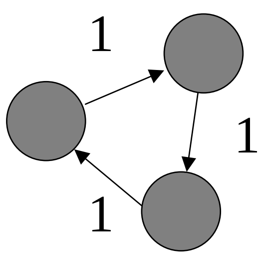
Resolución de la ecuación $\pi\,(\mathbf{I}-\mathbf{P}) = \mathbf{0}$ cambiando la última ecuación por $\pi\,\mathbf{e} = \mathbf{1}$:

```
octave:1> P=[0.8,0.15,0.05;0.7,0.2,0.1;0.5,0.3,0.2];
octave:2> s=size(P,1); # number of rows.
octave:3> [zeros(1,s-1),1] / ...
> [eye(s,s-1)-P(1:s,1:s-1), ones(s,1)]
ans =
  0.762500  0.168750  0.068750
```

NOTA: he puesto octave en: abiell# /users/scratch/llorenc/bin

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- No confundir la **distribución límite** $\pi(\infty)$ y la **distribución estacionaria** π, solución de la ecuación: $\pi = \pi\,\mathbf{P}$, $\pi\,\mathbf{e} = \mathbf{1}$
- En general π y $\pi(\infty)$ NO tienen por que ser iguales:



En esta caso $\pi(\infty)$ NO existe ($\mathbf{P}^\infty$ no converge) y $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

Teoremas para **cadenas ergódicas** (irreducibles y aperiódicas):

- $\pi = \pi(\infty)$
- El tiempo medio que estamos en un estado j durante un tiempo t se puede calcular como $t \cdot \pi_j$ (π_j es la porción de tiempo que la cadena está en el estado j).
- Definimos v_{ij}, la tasa de visitas, como el número medio de visitas al estado i entre dos visitas sucesivas al estado j. Tenemos que $v_{ij} = \pi_i/\pi_j$.
- $M_{ii} = 1/\pi_i$ (tiempo medio entre visitas sucesivas al estado j). Esta propiedad se cumple para cadenas irreducibles y recurrentes positivas, aunque sean periódicas (y por lo tanto no ergódicas).

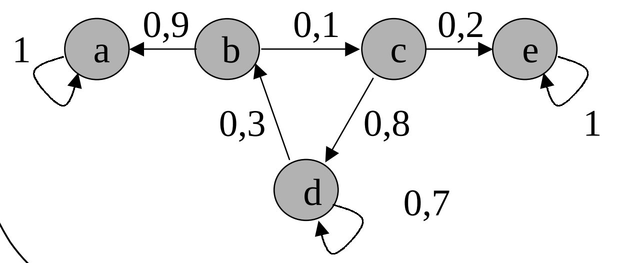
Cadenas de Markov de tiempo discreto

Cadenas absorbentes.

Sea la matriz $\mathbf{P}_{\{r,r\}}$ de una cadena con r estados: s estados transitorios y r-s estados absorbentes. En forma canónica:

$$\mathbf{P}_{\{r,r\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\{s,s\}} & \mathbf{R}_{\{s,r\text{-}s\}} \\ \mathbf{0}_{\{r-s,s\}} & \mathbf{I}_{\{r\text{-}s,r\text{-}s\}} \end{pmatrix}$$

- Ejemplo:



$$\Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ b \\ c \\ d \\ a \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} b & c & d & a & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0.1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

Cadenas absorbentes. $\mathbf{P}_{\{r,r\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\{s,s\}} & \mathbf{R}_{\{s,r\text{-}s\}} \\ \mathbf{0}_{\{r-s,s\}} & \mathbf{I}_{\{r\text{-}s,r\text{-}s\}} \end{pmatrix}$

Resultados.

- Definimos la V.A. n_{ij} = {número de visitas al estado j antes de la absorción, partiendo del estado i}.

$$\{E[n_{ij}]\} = \mathbf{N} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{Q})^{-1}.$$

- $\{Var[n_{ij}]\} = \mathbf{N}\ (2\ \mathbf{N_{diag}} - \mathbf{I}) - \mathbf{N_{sqr}}$. Donde $\mathbf{N_{sqr}} = \{E[n_{ij}]^2\}$.
- Definimos la V.A. t_i = {número de visitas a un estado transitorio antes de la absorción, partiendo del estado i}:

$$\{E[t_i]\} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}\ \mathbf{e}.\ \{Var[t_i]\} = (2\ \mathbf{N} - \mathbf{I})\ \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sqr}}.$$

- Definimos b_{ij} como la probabilidad de ser absorbido por el estado j ($j\in$ {absorbentes}) partiendo del estado i ($i\in$ {transitorios}):

$$\{b_{ij}\} = \mathbf{B} = \mathbf{N}\ \mathbf{R}.$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

Demostración (I).

- $\mathbf{N} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{Q})^{-1}$.

$$E[n_{ij}] = \delta_{ij} + \Sigma_{k\in T}\ p_{ik}\ E[n_{kj}] \Rightarrow \{E[n_{ij}]\} = \mathbf{N} = \mathbf{I} + \mathbf{QN} \Rightarrow \mathbf{N} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{Q})^{-1}.$$

(T es el conjunto de estados transitorios)

- $\{Var[n_{ij}]\} = \mathbf{N}\ (2\ \mathbf{N_{diag}} - \mathbf{I}) - \mathbf{N_{sqr}}$.

$$Var[n_{ij}] = E[n_{ij}^2] - E[n_{ij}]^2 \Rightarrow \{Var[n_{ij}]\} = \{E[n_{ij}^2]\} - \mathbf{N_{sqr}}$$

$$E[n_{ij}^2] = \Sigma_{k\in A}\, p_{ik}\ \delta_{ij} + \Sigma_{k\in T}\ p_{ik}\ E[(n_{kj} + \delta_{ij})^2] =$$

$$\Sigma_{k\in A}\ p_{ik}\ \delta_{ij} + \Sigma_{k\in T}\ p_{ik}\ (E[n_{kj}^2] + 2\ E[n_{kj}]\ \delta_{ij} + \delta_{ij}) =$$

$$\delta_{ij} + \Sigma_{k\in T}(\ p_{ik}\ E[n_{kj}^2] + 2\ p_{ik}\ E[n_{kj}]\ \delta_{ij}) \Rightarrow$$

$$\{E[n_{ij}^2]\} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}\ \{E[n_{ij}^2]\} + 2\ (\mathbf{Q}\ \mathbf{N})_{\mathbf{diag}} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} + 2\ (\mathbf{Q}\ \mathbf{N})_{\mathbf{diag}}) =$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{I} + 2\ (\mathbf{N}\text{-}\mathbf{I})_{\mathbf{diag}}) = \mathbf{N}(2\ \mathbf{N_{diag}} - \mathbf{I})$$

(A es el conjunto de estados absorbentes)

Cadenas de Markov de tiempo discreto

Demostración (II).

- $\{E[t_i]\} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}\,\mathbf{e}$.

  $E[t_i] = \Sigma_{k\in T}\, E[n_{ik}] \Rightarrow \{E[t_i]\} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}\,\mathbf{e}$.

- $\{\mathrm{Var}[t_i]\} = (2\,\mathbf{N} - \mathbf{I})\,\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sqr}}$.

  $\mathrm{Var}[t_i] = E[t_i^2] - E[t_i]^{\,2} \Rightarrow \{\mathrm{Var}[t_i]\} = \{E[t_i^2]\} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sqr}}$

$$E[t_i^2] = \Sigma_{k\in A}\, p_{ik} + \Sigma_{k\in T}\; p_{ik}\, E[(t_k + 1)^2] =$$
$$\Sigma_{k\in A}\, p_{ik} + \Sigma_{k\in T}\; p_{ik}\,(E[t_k^2] + 2\,E[t_k] + 1) =$$
$$1 + \Sigma_{k\in T}\,(\, p_{ik}\, E[t_k^2] + 2\, p_{ik}\, E[t_k]) \Rightarrow$$
$$\{E[t_i^2]\} = \mathbf{e} + \mathbf{Q}\,\{E[t_i^2]\} + 2\,\mathbf{Q}\,\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{e} + 2\,\mathbf{Q}\,\boldsymbol{\tau}) =$$
$$\mathbf{N}(\mathbf{e} + 2\,\mathbf{Q}\,\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} + 2\,\mathbf{N}\,\mathbf{Q}\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} + 2\,(\mathbf{N} - \mathbf{I})\,\boldsymbol{\tau} = (2\,\mathbf{N} - \mathbf{I})\,\boldsymbol{\tau}$$

- $\{b_{ij}\} = \mathbf{B} = \mathbf{N}\,\mathbf{R}$.

  $b_{ij} = p_{ij} + \Sigma_{k\in T}\; p_{ik}\, b_{kj}\,,\, j\in A \Rightarrow \{b_{ij}\} = \mathbf{B} = \mathbf{R} + \mathbf{Q}\,\mathbf{B} = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\,\mathbf{R} = \mathbf{N}\,\mathbf{R}$.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

Observación.

Si en vez de partir del estado *i* partimos con una distribución inicial $\boldsymbol{\pi}_0$, siendo $\boldsymbol{\pi}_0^{(T)}$ las componentes de los estados transitorios y $\boldsymbol{\pi}_0^{(A)}$ las componentes de los estados absorbentes:

- $n_j(\boldsymbol{\pi}_0)$ = {número de visitas al estado *j* antes de la absorción}:

$$E[\, n_j(\boldsymbol{\pi}_0)]\} = \boldsymbol{\pi}_0^{(T)}\,\mathbf{N}.$$
$$\{\mathrm{Var}[n_j(\boldsymbol{\pi}_0)]\} = \boldsymbol{\pi}_0^{(T)}\,\mathbf{N}\,(2\,\mathbf{N}_{\mathbf{diag}} - \mathbf{I}) - (\boldsymbol{\pi}_0^{(T)}\,\mathbf{N})_{\mathbf{sqr}}.$$

- $t(\boldsymbol{\pi}_0)$ = {número de visitas a un estado transitorio antes de la absorción}:

$$\{E[t(\boldsymbol{\pi}_0)]\} = \boldsymbol{\pi}_0^{(T)}\,\boldsymbol{\tau}.\ \{\mathrm{Var}_{\pi}[t_i]\} = \boldsymbol{\pi}_0^{(T)}\,(2\,\mathbf{N} - \mathbf{I})\,\boldsymbol{\tau} - (\boldsymbol{\pi}_0^{(T)}\,\boldsymbol{\tau})_{\mathbf{sqr}}.$$

- $b_j(\boldsymbol{\pi}_0)$ = {probabilidad de ser absorbido por el estado *j*}:

$$\{b_j(\boldsymbol{\pi}_0)\} = \boldsymbol{\pi}_0^{(T)}\,\mathbf{B} + \boldsymbol{\pi}_0^{(A)} = \boldsymbol{\pi}_0^{(T)}\,(\mathbf{N}\,\mathbf{R}) + \boldsymbol{\pi}_0^{(A)}\ .$$

Cadenas de Markov de tiempo discreto

Extensión de los resultados.

Un conjunto S se llama abierto si desde cualquier estado se puede alcanzar un estado de S^c. Sea $\mathbf{Q}$ la submatriz de $\mathbf{P}$ correspondiente a un conjunto cerrado. Sea $\mathbf{R}$ la submatriz $\mathbf{R} = \{p_{ij}, i \in S, j \in S^c\}$. Supongamos que el proceso parte de $i \in S$:

- Definimos la V.A. n_{ij} = {número de visitas al estado j antes de salir de S}: $\{E[n_{ij}]\} = \mathbf{N} = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$ y $\{Var[n_{ij}]\} = \mathbf{N}\,(2\,\mathbf{N}_{\mathbf{diag}} - \mathbf{I}) - \mathbf{N}_{\mathbf{sqr}}$.
- Definimos la V.A. t_i = {número de visitas a un estado $\in S$ antes de salir de S}: $\{E[t_i]\} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}\,\mathbf{e}$. $\{Var[t_i]\} = (2\,\mathbf{N} - \mathbf{I})\,\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sqr}}$.
- Definimos b_{ij} como la probabilidad de ir a $j \in S^c$: $\{b_{ij}\} = \mathbf{B} = \mathbf{N}\,\mathbf{R}$.